
ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)

Semestre d'automne — 2024-2025

Série 2: Systèmes linéaires II

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

- (O.1) calculer la **forme échelonnée réduite** d'une matrice, avec la méthode de Gauss-Jordan ;
- (O.2) déterminer les **variables liées** et **variables libres** ;
- (O.3) calculer les **solutions d'un SEL** à partir de la forme échelonnée réduite ;
- (O.4) exprimer un vecteur de $\mathbb{R}^n$ comme **combinaison linéaire** d'autres vecteurs, si possible.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- algorithme de Gauss-Jordan
- variables liées (ou de base)
- variables libres (ou fondamentales)
- combinaison linéaire



Noyau d'exercices

1.1 Algorithme de Gauss et résolution de systèmes linéaires

Exercice 1 (Formes échelonnées réduites)

Déterminer toutes les valeurs possibles des nombres a, b, c, d et e dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice suivante est sous forme échelonnée et forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c & 1 & d & 3 \\ 0 & e & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (Algorithme de Gauss-Jordan)

Échelonner et réduire les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (Résolution de systèmes d'équations linéaires I)
Rappel de la théorie

On rappelle que, étant donné une matrice augmentée A avec m lignes et $n+1$ colonnes, le **SEL associé est incompatible si et seulement si la FER de A contient une ligne de la forme $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ ; \ a)$ avec $a \in \mathbb{R}$ non nul.**

En plus une variable x_i avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ du SEL associé est **libre** si la i -ème colonne de la FER de A ne contient pas de pivot, et **liée** si la i -ème colonne de la FER de A contient un pivot. **Si le SEL associé à A est compatible, il possède une infinité de solutions si et seulement s'il admet une variable libre.**

Pour chacun des systèmes suivants :

- (a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8, \\ 4x_1 - 3x_2 = 6, \end{cases}$
- (b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \end{cases}$
- (c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_3 = 2, \\ x_4 = -1, \end{cases}$
- (d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3, \end{cases}$
- (e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \end{cases}$

- (i) écrire la matrice augmentée ;
 (ii) transformer la matrice augmentée sous forme échelonnée réduite ;
 (iii) identifier les variables liées et les variables libres, et écrire l'ensemble de toutes les solutions.

Exercice 4 (Formes échelonnées réduites et nombre de solutions)

Pour chacune des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que l'on va considérer comme des matrices augmentées pour les deux dernières questions,

- (i) vérifier si les matrices suivantes sont sous forme échelonnée ou sous forme échelonnée réduite ;
 (ii) identifier les variables liées et les variables libres ;
 (iii) déterminer si les SEL respectifs possèdent exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

Exercice 5 (Systèmes avec paramètres)

Déterminer les valeurs du nombre réel $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le système d'équations linéaires

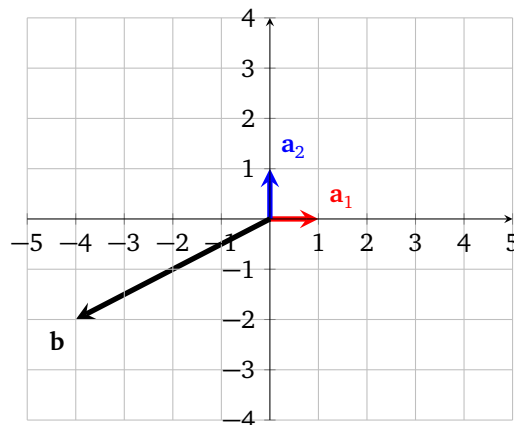
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_2 + ax_3 = 2, \\ (a^2 - 4)x_3 = a - 2, \end{cases}$$

possède des solutions et déterminer ces solutions.

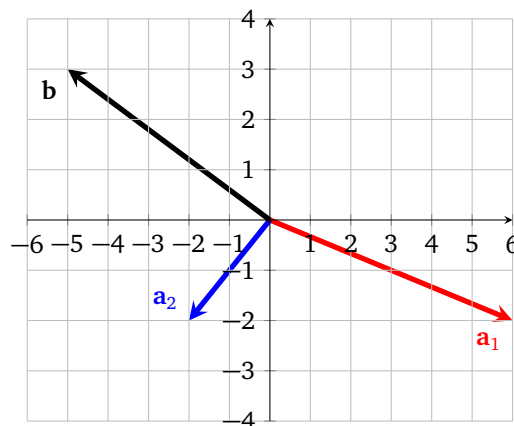
1.2 Vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ et leurs combinaisons linéaires
Exercice 6 (Combinaisons linéaires dans le plan)

À l'aide des graphes ci-dessous, trouver les coefficients des combinaisons linéaires demandées. Il se peut qu'il existe plusieurs solutions, ou aucune solution. Dans les graphes ci-dessous, l'échelle est l'unité.

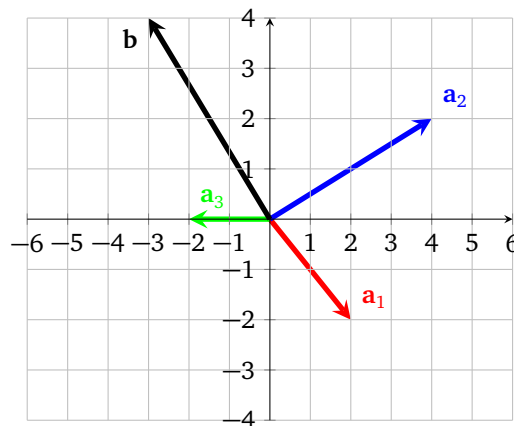
(a) Trouver $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$ pour le graphe



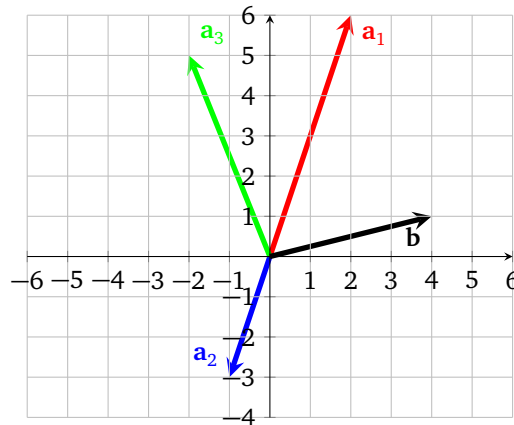
(b) Trouver $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$ pour le graphe



(c) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$ pour le graphe



(d) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$ pour le graphe



Peut-on trouver $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{b} = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2$?

Exercice 7 (Combinaisons linéaires dans l'espace I)

On considère les vecteurs

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Est-il possible d'écrire $\mathbf{b}$ comme combinaison linéaire de $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$?
- (b) Donner une interprétation géométrique du résultat.



Pour compléter la pratique

2.1 Algorithme de Gauss et résolution de systèmes linéaires

Exercice 8 (Réduction et nombre de solutions)

On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Mettre les matrices précédentes sous forme échelonnée et sous forme échelonnée réduite.
- (ii) Supposons que ces matrices sont des matrices augmentées de SEL. Déterminer dans chaque cas si le SEL respectif possède exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

Exercice 9 (Colonnes avec des pivots)

Laquelle des colonnes de la forme échelonnée réduite de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ne contient pas de pivot ?

Exercice 10 (Résolution de systèmes d'équations linéaires II)

À l'aide de l'algorithme d'élimination de Gauss, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 - x_5 = 4, \\ x_4 - x_5 = 3, \\ x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 7. \end{cases}$$

Exercice 11 (Résolution de systèmes d'équations linéaires III)

Déterminer l'ensemble de solutions des SEL suivants :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1, \end{cases} \\ \text{(b)} \quad & \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 12 (V/F sur compatibilité de SEL)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse. V F

- (a) Le système homogène d'équations linéaires représenté par la matrice

☐ ☐

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

est compatible.

- (b) Le système inhomogène d'équations linéaires représenté par la matrice

☐ ☐

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

est compatible.

- (c) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible.

☐ ☐

- (d) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible.

☐ ☐

- (e) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible.

☐ ☐

- (f) Il existe une matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues avec un pivot dans chaque colonne. En plus, le SEL associé est compatible.

☐ ☐

2.2 Vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ et leurs combinaisons linéaires

Exercice 13 (Combinaisons linéaires dans l'espace II)

On considère les vecteurs

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w}_\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Pour quelles valeurs de α le vecteur $\mathbf{w}_\alpha$ peut-il être écrit comme une combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$? Trouver dans ce cas des coefficients $\lambda_{1,\alpha}, \lambda_{2,\alpha} \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{w}_\alpha = \lambda_{1,\alpha}\mathbf{v}_1 + \lambda_{2,\alpha}\mathbf{v}_2$.
- (b) Le vecteur $\mathbf{v}$ se trouve-t-il dans le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}?$$

Justifiez votre réponse.

Exercice 14 (Combinaisons linéaires dans $\mathbb{R}^4$)

On considère le sous-espace vectoriel $S = \text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4\} \subseteq \mathbb{R}^4$, où

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Laquelle des informations suivantes est correcte ?

- ☐ Le sous-espace vectoriel S ne contient aucun vecteur de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ Le sous-espace vectoriel S contient tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ Le vecteur $\mathbf{v}$ est dans S .
- ☐ Le sous-espace vectoriel S contient une infinité de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 15 (Combinaisons linéaires avec un paramètre)

On considère les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha + 7 \\ 8 \\ 2\alpha + 1 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Le vecteur $\mathbf{w}_\alpha$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ lorsque

- ☐ $\alpha = 2$; ☐ $\alpha = 4$; ☐ $\alpha = 1$; ☐ $\alpha = -2$.